Grado en Física

Examen de Análisis Matemático I – Febrero 2013

1. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x + \dfrac{x^3}{2}$ (también puede ser la función $f(x) = \cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x + \dfrac{2}{3}x^3$) se anula en al menos tres puntos.

   b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

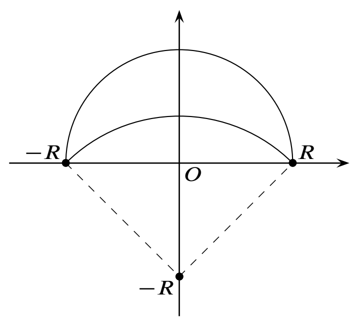
2. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x = \alpha$ según los valores de α.

3. Prueba que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2]$ se verifica la desigualdad:

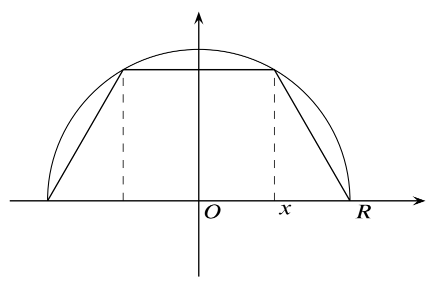
$$\frac{\mathrm{sen}\,x}{1 + \mathrm{sen}\,x} \leqslant \ln(1 + \mathrm{sen}\,x).$$

   ¿Cuándo se da la igualdad?

4. Calcula el área de la luna formada por la intersección de la parte superior de los círculos $C((0,0), R)$ y $C((0,-R), \sqrt{2}R)$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



5. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área maxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R.



6. Calcula la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - 11}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)}\,\mathrm{d}x$$

7. Calcula el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \ln(1 + x^2) - \cos x}{x^2}$$

   Y usa el resultado obtenido para estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

8. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

   b) $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$.

   c) $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{7\cdot 10\cdot 13\dots(3n+4)}{14\cdot 17\cdot 20\dots(3n+11)}}$.

9. Calcula los límites de las sucesiones:

   a) $x_n=\left(3\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^n$.

   b) $y_n=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$.

   c) $z_n=\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$.

10. Sea la serie de potencias $\sum_{\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

    a) Calcula el radio de convergencia y estudia la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

    b) Calcula a función suma de la serie.

    c) Calcula la suma de la serie $\sum_{\geqslant 1}\frac{1}{n(2n-1)}$.

11. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1}nx^{n-1}$, $\sum_{n\geqslant 1}nx^n$, y $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Granada, 15 de febrero de 2013